

Решения Математического праздника Математической Вертикали 2021 г.

7 класс

Задача 1.

Ответ: 30.

Так как на дереве оказались фрукты всех видов, то хотя бы на одной ветке выросли яблоки, а значит, их не меньше 6. Поскольку яблок меньше всего, то апельсины выросли минимум на трёх ветках, а значит, их хотя бы 9.

Осталось ещё три ветки. Допустим, что на какой-то из них выросли не груши. Тогда груши выросли не более чем на двух ветках, что означает, что их не более 10. При этом ещё на одной ветке выросли либо яблоки, тогда их будет 12, либо апельсины, тогда их тоже будет 12. В обоих случаях груш не будет больше всего, а значит, наше предположение невозможно. Получаем, что на одной ветке выросли 6 яблок, на трёх других по 3 апельсина и на оставшихся трёх — по 5 груш. Итого $6 + 9 + 15 = 30$ фруктов.

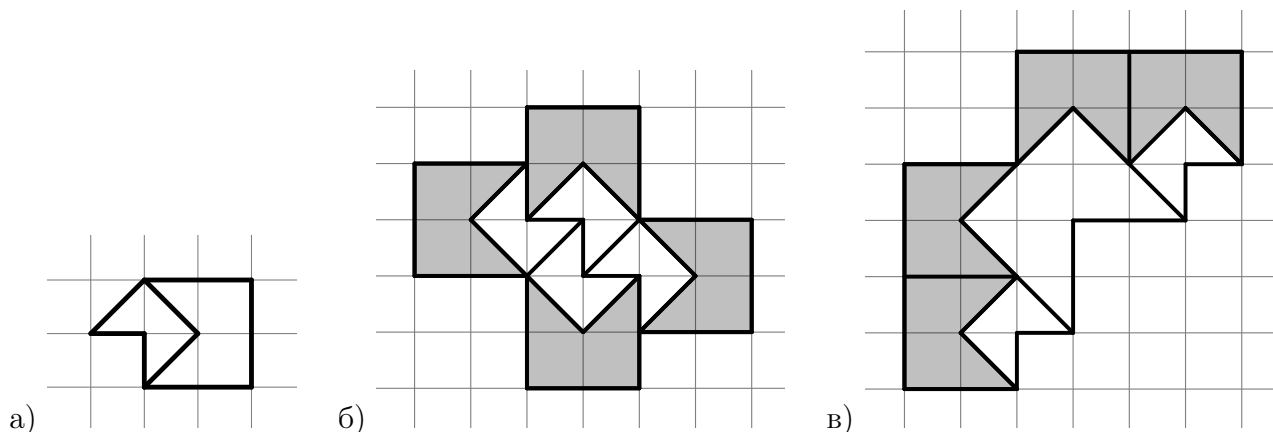
Задача 2.

Ответ: 40 и 57.

Обозначим числа, загаданные фокусником, через a и b . Тогда по условию $a \cdot b = 2280$ и при этом число $a + b$ двузначно и нечётно. Так как произведение a и b чётно, то хотя бы одно из них будет чётно. Но если чётными будут оба числа, то и их сумма была бы чётна, что неверно. Значит, одно из чисел чётно, а другое — нечётно.

Посмотрим тогда какие простые множители могут входить в нечётное из этих чисел. Для этого разложим число 2280 на простые множители: $2280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$. Получается, что в нечётное число могут входить только 3, 5, 19, причём все не более, чем в первой степени, иначе в произведении со вторым числом не получилось бы 2280. При этом остальные множители из этого набора будут вместе с 8 в произведении давать второе число. Так как оба числа должны быть меньше 100, получаем, что произведение нечётных множителей, не входящих в нечётное число, должно быть меньше, чем $100/8 = 12,5$. Значит, в нечётном множителе присутствует число 19 и либо 3, либо 5, либо и 3 и 5. Небольшим перебором убеждаемся, что $19 \cdot 3 \cdot 5$ не подходит (тогда $19 \cdot 3 \cdot 15 > 100$), также не подходит $19 \cdot 5$ (тогда числа будут равны $19 \cdot 5 = 95$ и $8 \cdot 3 = 24$ и $95 + 24 > 100$). Остаётся единственный вариант $19 \cdot 3 = 57$ и $8 \cdot 5 = 40$, который удовлетворяет всем условиям, так как число $57 + 40 = 97$ двузначное и нечётное.

Задача 3. Ниже показано как можно разрезать каждую из фигур.



Задача 4.

Ответ: 6 минут.

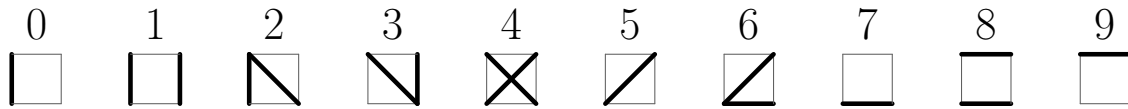
Пусть от момента запуска видео до момента, когда братья оказались в одной точке, прошло t минут (t не обязательно целое). Тогда от Петиного видео оставалось до конца просмотра (то есть до начала ролика, так как видео идёт задом наперёд) $6 - t$ минут. Склеивая первые t минут

Васино ролика и оставшиеся $6 - t$ минут Петиного получается видео продолжительностью $t + 6 - t = 6$ минут.

Задача 5.

Ответ: 83859206147.

Несложно убедиться, что номер 83859206147 подходит под условие задачи. Для этого достаточно выписать коды цифр 0, 1, 2, ..., 9 в таком же порядке:



Докажем, что не могло быть других вариантов и, заодно покажем как найти это решение.

Заметим, что символ □, обозначающий по условию цифру 8, имеет по одному общему отрезку с символами □, □ и ▣. Значит, три последних символа могут быть равны только 9, 7 и 6. А так как их ровно 3, то все остальные символы кодируют цифры, меньше 6. Теперь заметим, что символ ▣ имеет общий отрезок с символами ▣ и ⊗. Но поскольку оба последних символа меньше 6, то символ ▣ не может быть больше 6, а значит, он кодирует как раз цифру 6. Легко видеть, что символ □, имеющий с ним общий отрезок, не может тогда кодировать цифру 9, так как 9 и 6 отличаются более, чем на 2. Следовательно, он кодирует цифру 7, а символ □ кодирует цифру 9.

Символы ▣ и ⊗, как мы уже выяснили кодируют цифры 4 и 5, правда ещё не известно какой именно символ соответствует 4, а какой — 5. Заметим, что символ ⊗ имеет общий отрезок ещё с двумя символами: ▣ и ▣. Значит, он не может быть равен 5, потому что оба последних символа меньше 4, а значит, один из них не больше 2. Получаем, что ⊗ кодирует 4, а ▣ — 5.

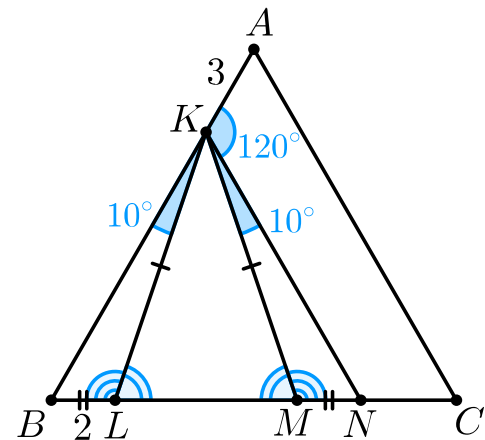
По аналогичным соображениям можно увидеть, что символ ▣ имеет общий отрезок с двумя другими символами: □ и □, а значит, он равен 2, а символ ▣ — 3. Наконец, поскольку символ □ имеет общий отрезок с ▣, обозначающий 3, то он не может быть равен 0, а значит, кодирует 1. код 0 определяется автоматически.

Задача 6.

Ответ: а) 130° ; б) 5.

Первое решение. Отметим на отрезке MC точку N такую, что $NM = BL$. Так как треугольник LKM равнобедренный, углы KLM и KML при его основании равны. Значит, равны и смежные с ними углы KLB и KMN . Отсюда следует равенство треугольников BKL и NKM по второму признаку равенства треугольников. Значит, $\angle KNB = \angle KBL = 60^\circ$, то есть треугольник BKN тоже правильный.

Для решения пункта а) заметим, что из равенства треугольников так же следует, что $\angle MKN = \angle BKL = 10^\circ$. Тогда $\angle AKM = \angle AKN + \angle NKM = 180^\circ - \angle BKN + \angle NKM = 180^\circ - 60^\circ + 10^\circ = 130^\circ$. Для решения пункта б) осталось заметить, что $BK = BN$ и $BA = BC$, а значит $NC = KA$. Тогда $MC = MN + NC = BL + KA = 2 + 3 = 5$.



Второе решение. Проведём в треугольнике LKM высоту KF . Так как этот треугольник равнобедренный, то эта высота является так же и биссектрисой, и медианой. Тогда по сумме углов треугольника BKF находим, что $\angle BKF = 180^\circ - \angle KBF - \angle KFB = 30^\circ$. Тогда $\angle LKF =$

$\angle BKF - \angle BKL = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$. Так как KF — биссектриса угла LKM , получаем, что $\angle FKM = \angle FKL = 20^\circ$. Тогда $\angle AKM = 180^\circ - \angle BKL - \angle LKF - \angle FKM = 180^\circ - 10^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 130^\circ$.

Для решения пункта б) обозначим отрезок LF через x . Тогда так как BF — медиана треугольника LKM , то $FM = FL = x$. С другой стороны известно, что в треугольнике с углами $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ сторона, лежащая напротив угла в 30° вдвое меньше гипотенузы. Пользуясь этим фактом для треугольника BKF получаем, что $BK = 2 \cdot (x + 2) = 2x + 4$. Пользуясь равенством сторон AB и BC можно составить уравнение: $3 + 2x + 4 = 2 + 2x + MC$, откуда $MC = 5$.